OBMV

3ª Olimpíada Brasileira de Matemática Virtual

DESAFIO FINAL – TODOS OS NÍVEIS

01. (Nível 1) No planeta Zilotaskabatu, as unidades de medidas são bem diferentes das que conhecemos na Terra. A medida padrão de comprimento é o Zimetro e um de seus submúltiplos é o Zimimimetro que equivale a 10^{-7} Zimetros. Uma calculadora pode realizar apenas duas operações: multiplicar um número por 10^{8} ou dividi-lo por 10^{5}. Por exemplo, usando as operações da calculadora, podemos fazer as seguintes conversões:

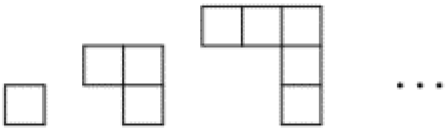
$$3 \rightarrow 3 \cdot 10^{-5} \rightarrow 3 \cdot 10^{-10} \rightarrow 3 \cdot 10^{-2}$$

a) Explique como combinarmos as duas operações da calculadora e fazermos aparecer na tela o número que representa a conversão de $7 \cdot 10^{2}$ Zimetros em Zimimimetros.

b) Como obter a conversão de $10^{10} \cdot 10^{-4}$ Zimetros em Zimimimetros começando com o número 1000 na tela da calculadora?

c) Usando a calculadora, é possível transformar 10^{2017} em 10^{11} usando as duas teclas mencionadas?

02. (Nível 1) Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que, a pecinha de número 1 é um quadradinho:

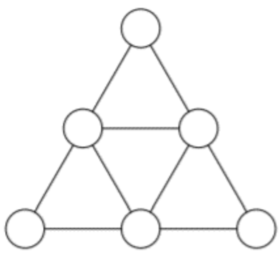


a) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?

b) Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número a 1 a 50?

c) Observando o resultado anterior, calcule $2 + 4 + 6 + \cdots + 96 + 98 + 100$.

03. (Nível 1) Considere os seis círculos sobre os lados de um triângulo como na figura a seguir:



a) Mostre uma maneira de colocar cada um dos números de 1 a 6 em cada um dos círculos, de como que a soma dos três números em cada lado do triângulo maior seja igual a 12.

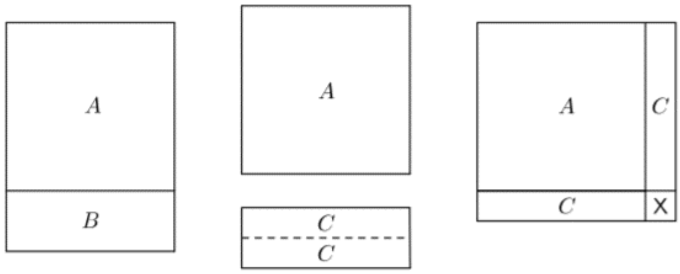
b) Mostre que **não** é possível colocar os números de 1 a 6 em cada um dos círculos, de modo que a soma dos três números em cada lado do triângulo maior seja igual a 13.
c) É possível colocar os números de 1 a 6 em cada um dos círculos de modo que as somas dos números em cada um dos lados do triângulo maior seja igual à soma dos três números que estão no meio dos três lados do triângulo maior?

04. (Níveis 1 e 2) Filomenaneidezilda gosta de escrever em seu caderno. Um dia ele escreveu os números de 1 até 999, um ao lado do outro, para formar o número gigante:
123456789101112...997998999.
Sobre este número pergunta-se:
a) Quantos dígitos foram escritos?
b) Quantas vezes aparece o dígito 1?
c) Considerando que 1 ocupa a posição 1, 2 ocupa a posição 2 e 0 aparece pela primeira vez ocupando a posição 11, qual dígito ocupa a posição 2016?

05. (Níveis 1 e 2) Um grupo de dez caçadores de relíquias encontrou um baú de moedas de ouro com 100 moedas que permaneceu perdido por mais de duzentos anos. Para facilitar a organização de todos, cada caçador recebe um número de 1 a 10 de acordo com a hierarquia que cada um tem no grupo. Isto é, o caçador número 10 é o chefe enquanto o número 1 não pode dar ordens para nenhum dos outros. Eles decidiram usar uma certa forma de "democracia" para dividir as moedas de ouro. O caçador 10 faz uma proposta para a divisão de todas as moedas entre os 10 caçadores. Cada caçador vota a favor ou contra. Se metade ou mais dos caçadores votar a favor, esta divisão é realizada. Caso contrário, o caçador 10 perde sua vez e fica fora da divisão de moedas. O caçador 9, então, poderá fazer sua proposta de divisão das 100 moedas entre os caçadores de 1 até 9. Novamente, cada caçador de 1 até 9 vota a favor ou contra e, se metade ou mais concordar, a divisão é feita. Caso contrário, o caçador 9 perde sua vez e fica sem moedas. O processo segue passando para o caçador 8 e assim sucessivamente. Os caçadores sabem que cada moeda não pode ser dividida, pois vale muito mais inteira. Além disso, cada caçador quer ganhar o máximo de moedas possível.
a) Suponha que o processo chegou até a vez do caçador 3. Qual a proposta que ele deve fazer para obter o maior ganho e ainda contar com a garantia de que sua proposta seja aceita na votação com os caçadores 1, 2 e 3?
b) Suponha que o processo chegou ao caçador 4. Os caçadores são muito espertos e sabem a resposta do item anterior. Qual a proposta o caçador 4 deve fazer para ter o maior ganho possível e ainda contar com a garantia de que ela seja aceita?
c) Voltemos ao início do problema e lembremo-nos de que todos os caçadores são muito espertos. Qual a proposta que o caçador 10

deve fazer para obter o maior ganho e ainda contar com a garantia de que sua proposta seja aceita em votação?

06. (Nível 2) Encontrar um número que somado a 13600 forma um quadrado perfeito não parece ser uma tarefa fácil. Vamos resolver isso geometricamente. Considere um retângulo de área 13600 com um dos lados igual a 136. Divida-o em um quadrado A e um retângulo B. Corte o retângulo B em dois retângulos iguais, ambos denotados por C. Posicione os retângulos C sobre dois lados consecutivos do quadrado A.



a) Qual a área do retângulo C?
b) Veja que se adicionarmos o quadrado X, completamos um quadrado maior. Qual deve ser o lado do quadrado X?
c) Após responder os dois itens anterior, determine um número que somado a 13600 resulta em um quadrado perfeito e determine a raiz quadrada desse quadrado perfeito.

07. (Níveis 2 e 3) Há muitos anos, um professor que não queria dar aula, ordenou que seus alunos calculassem a soma dos números de 1 até 100. Um aluno muito esperto, chamado Gauss, descobriu um jeito muito simples de realizar a tarefa descobrindo a fórmula:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

a) Verifique que todo número primo maior que 3 deixa resto 1 ou 5 na divisão por 6.
b) Verifique que a soma dos números primos que são maiores que 1 e menores que 1000 é menor que 166338.
c) Na estimativa acima, para ter menos complicações técnicas, não eliminamos alguns números que certamente não são primos. Elimine alguns desses números e verifique que a soma dos primos que são maiores que 1 e menores que 1000 é menor que 166000.

08. (Níveis 2 e 3) Justabandicalvinazato está treinando para olimpíadas de matemática. Um dia ela decide dividir 2014 por cada um dos divisores inteiros positivos de 2015. Para cada divisão, ela escreve o quociente no seu caderno e o resto em uma lousa.

a) Vamos ajudar Justabandicalvinazato. Escreva os oito divisores inteiros positivos de 2015.
b) Para cada um dos divisores, faça a divisão e escreva uma lista com os quocientes e outra com os restos obtidos.
c) Ao terminar, Justabandicalvinazato percebeu uma grande “coincidência”: os números escritos no caderno eram os mesmos que

estavam no quadro, apenas escritos em ordem diferente. Seria uma coincidência? Mostre que, para qualquer número n que Justabandicalvinazato escolher, se ela calcular o quociente e o resto da divisão de n-1 por cada um dos divisores de n os números no caderno e na lousa serão exatamente os mesmos, estando apenas, possivelmente, escritos em uma ordem diferente.

09. (Nível 3) Ana, Beto e Carolina vão participar do programa de televisão "Descubra a cor do seu chapéu". No programa, eles se posicionam em roda e sobre a cabeça de cada um será colocado um chapéu azul ou verde. Cada um pode ver os chapéus dos outros, mas não a cor do seu próprio chapéu. Em seguida, cada um deles escreve em um papel uma dentre três opções "azul", "verde" ou "passo". Se todos os que escreveram cores "azul" ou "verde" acertarem a cor do seu chapéu, eles ganham um carro 0km. Se algum deles chutar a cor do chapéu, "azul" ou "verde", e errar, os três perdem. Se todos eles escreverem "passo", então os três também perdem. Vale ressaltar que eles não podem combinar sinais e não podem ver os papéis dos outros participantes. Os três se reúnem para tentar combinar uma estratégia. Carolina começa "nenhum de nós deve escrever 'passo', devemos chutar entre 'azul' e 'verde', pois se todos passarmos perderemos". Beto reage dizendo "discordo, melhor apenas Ana chutar a cor do seu chapéu, enquanto eu e Carolina escrevemos 'passo'. Neste caso, a chance de ganhar será maior". Ana se pronuncia "tive uma ideia, se usarmos a minha estratégia teremos a probabilidade de 3/4 de ganhar o carro".

a) Seguindo a ideia de Carolina, qual a probabilidade de ganhar o carro?
b) Mudando para a ideia de Beto, qual passa a ser a probabilidade de ganhar o carro?
c) Dê um exemplo da possível estratégia de Ana que faz a probabilidade de ganhar o carro ser 3/4.

10. (Nível 3) Em certa loteria, existem 60 números distintos e 6 deles são sorteados sem reposição. Cada bilhete possui 6 números distintos entre os 60 possíveis. O prêmio máximo, conhecido como "gol-no-ângulo", é dado para o jogador que possuir o bilhete com os mesmos 6 números que foram sorteados. Nesta loteria, também existe o prêmio "bola-na-trave". Em um bilhete bola-na-trave, o menor número não possui diferença, em módulo, maior que 1 para o menor número sorteado, o segundo menor número não possui diferença, em módulo, maior que 1 para o segundo menor número sorteado e assim por diante até o sexto menor número. Por exemplo, suponha que o bilhete gol-no-ângulo seja {4, 7, 25, 48, 51, 60}. Então os bilhetes {3, 6, 25, 49, 50, 59} e {5, 6, 25, 47, 50, 60} são bilhetes bola-na-trave, mas o bilhete {3, 4, 6, 24, 47, 50} não é bola-na-trave. Vale lembrar que um bilhete gol-no-ângulo não é um bilhete bola-na-trave. Para os itens a seguir, considere cada bilhete como a escolha de uma sequência de 6 números escritos em ordem crescente.

a) Dê um exemplo de conjunto de 6 números formando um bilhete gol-no-ângulo que tem o menor número possível de bilhetes bola-na-trave associados a ele. Quantos bilhetes bola-na-trave possíveis haveria para estes 6 números?

b) Dê um exemplo de conjunto de 6 números formando um bilhete gol-no-ângulo que resulta na maior quantidade possível de bilhetes bola-na-trave. Neste caso, haveria quantos bilhetes bola-na-trave possíveis?

c) Considere os números sorteados {2, 3, 8, 11, 14, 17}, quantos são os bilhetes bola-na-trave associados a ele?

11. (Nível 3) Considere cinco números reais positivos ordenados por $0 < a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Sabe-se que sempre que tiramos um destes números, podemos separar os outros quatro em dois grupos tais que a soma dos números de um grupo é igual à soma dos números do outro grupo. Se uma sequência (a,b,c,d,e) satisfaz est condição, dizemos que ela é **quase-equilibrada.** Existem sequências que atendem a uma condição mais restrita: se retirarmos um número podemos separar os quatro números restantes em dois grupos **com a mesma quantidade de números** tais que a soma dos números de um grupo é igual à soma dos números do outro grupo. Se uma sequência de números reais positivos (a,b,c,d,e) satisfaz esta condição mais restrita, dizemos que essa sequência é **equilibrada**.

a) Mostre um exemplo de cinco números reais positivos ordenados por $0 < a \leq b \leq c \leq d \leq e$, com $a < e$, que formam uma sequência quase equilibrada. Veja que podemos fazer alguns deles iguais se isto for conveniente.

b) Se uma sequência equilibrada possui três termos iguais, mostre que os cinco números são obrigatoriamente iguais.

c) Considere uma sequência equilibrada (a,b,c,d,e) com $0 < a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Sabe-se ainda que $(e + c) = (b + d)$ e que $(e + a) = (c + d)$. Prove que os cinco números são iguais.