OBMV

3ª Olimpíada Brasileira de Matemática Virtual

DESAFIO FINAL – GABARITO ALL

01. a) Queremos que apareça na tela o número $7 \cdot 10^2 \cdot 10^7 = 7 \cdot 10^9$. Uma maneira de fazer tal conversão, começando com $7 \cdot 10^2$, é apertar quatro vezes a tecla com a operação de multiplicação e cinco vezes a de divisão por seus respectivos números.

$7 \cdot 10^2 \to 7 \cdot 10^{10} \to 7 \cdot 10^{18} \to 7 \cdot 10^{26} \to 7 \cdot 10^{34} \to 7 \cdot 10^{29} \to 7 \cdot 10^{24}$
$\to 7 \cdot 10^{19} \to 7 \cdot 10^{14} \to 7 \cdot 10^9$.

b) Queremos que apareça na tela o número $10^{10} \cdot 10^{-4} \cdot 10^7 = 10^{13}$, que é a conversão do número dado em Zimimimetros. Uma maneira de fazer tal conversão, começando com 1000, é apertar cinco vezes a tecla com a operação de multiplicar por 10^8 e seis vezes a tecla da divisão por 10^5.

$$1000 \to 1000 \cdot 10^{5-8} \to 1000 \cdot 10^{5-8} \cdot 10^{-6\cdot 5} = 10^{3+5-6\cdot 5} = 10^{13}.$$

c) Se usarmos a tecla de divisão por 10^5 cinco vezes e, em seguida, usarmos a tecla de multiplicação por 10^{-8} três vezes, alteraremos o número da tela por um fator de $10^{-5\cdot 5+3\cdot 8} = 10^{-1}$. Portanto, repetindo-se esta exata sequência de operações 2017-11=2006 vezes, iremos chegar no número pedido.

02. a) Veja que a cada incremento de uma unidade no número da pecinha, aumenta-se o número de quadradinhos em 2 unidades. Logo, a pecinha 50 terá $1 + 2 \cdot 49 = 99$ quadradinhos.

b) Veja que as pecinhas podem ser justapostas para formar um quadrado maior dividido em quadradinhos. O que determinar o lado desse quadrado é o número da maior pecinha utilizada. Deste modo, as 50 pecinhas têm no total $50 \cdot 50 = 2500$ quadradinhos.

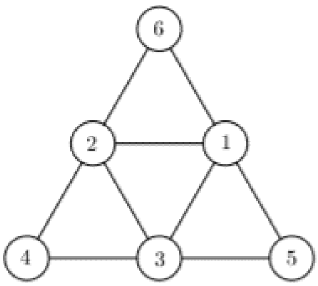
c) Veja que o item anterior nos fornece a seguinte equação:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 95 + 97 + 99 = 2500.$$

Se adicionarmos 1 a cada uma das 50 parcelas da soma anterior, teremos a soma desejada:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 95 + 97 + 99 = 2500$$
$$(1 + 1) + (3 + 1) + (5 + 1) + \cdots + (97 + 1) + (99 + 1) = 2500 + 50$$
$$2 + 4 + 6 + \cdots + 96 + 98 + 100 = 2550.$$

03. a) Uma possível solução é:



b) Observe que o número 6 participa no máximo de dois lados do triângulo maior. Considere um lado em que ele não aparece. A soma máxima dos números nos círculos deste lado é

$$3 + 4 + 5 = 12$$

$$< 13.$$

c) Não. Provaremos isto por contradição. Suponha que as quatro somas resultassem em um mesmo inteiro S. Cada número em um círculo aparece em exatamente duas destas somas, portanto,

$$4S = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$$
$$2S = 21$$

Como 21 é ímpar, o número S não seria inteiro e isto é uma contradição.

04. a) Observe que temos 9 números com um dígito cada, 99-9=90 números com dois dígitos e 999-99=900 números com três dígitos cada. Portanto, a quantidade de dígitos escritos é: $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 9003 = 2889$.

b) Veja que o dígito 1 aparece uma vez entre os números de um dígito. Entre os números de dois dígitos, o 1 aparece 10 vezes como dezena e aparece 9 vezes como unidade, totalizando 19 vezes entre os números de 2 algarismos. Entre os números de três dígitos, o 1 aparece 100 vezes como centena. Além disto, para cada uma das 9 centenas distintas, teremos o 1 aparecendo 10 vezes como unidade. Logo, em tais ele aparece $9 \cdot (10 + 10) = 180$ vezes. Concluímos que o número de aparições do dígito 1 é:

$$1 + 19 + 100 + 180 = 300.$$

c) Veja que $2016 > 9 + 90 \cdot 2 = 189$, então o dígito de posição 2016 aparecerá entre os números de três dígitos. De fatos, podemos buscar o dígito 2016-189=1827 a partir dos números 100101102103... Como $1827 = 3 \cdot 609$, então, sendo o 100 o primeiro número, o último dígito do número de ordem 609 será o dígito procurado. O número de ordem 609 é 100+609-1=708.

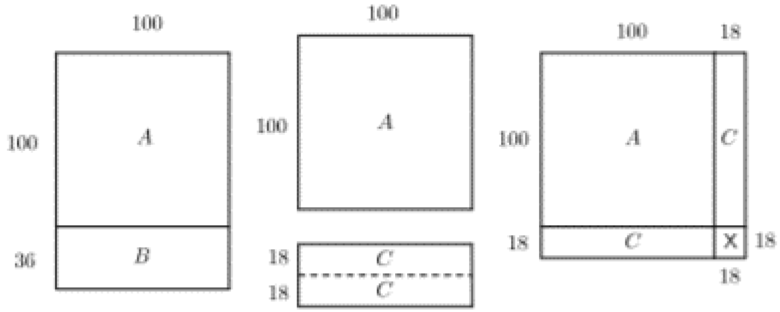
Concluímos assim que o dígito de ordem 2016 nesta sequência é 8.

05. a) Considere primeiro o cenário em que a proposta do caçador 3 não é aceita. Neste caso, o caçador 2 leva tudo, pois o voto dele já representa metade dos votos. Voltando à proposta do caçador 3, veja que além do próprio voto ele precisa de mais um para que sua proposta seja aceita. Se ele propuser 99 moedas para si e uma para o caçador 2, os caçadores 1 e 2 poderiam votar contra, pois o caçador 2 poderia ganhar todas as moedas e, para o caçador 1, tal resultado seria indiferente. Por outro lado, se o caçador 3 propuser 99 para si e uma moeda para o caçador 1, então este último votará a favor, pois esta situação é melhor para ele do que o caçador 2 levar tudo.

b) É importante lembrar que todos os caçadores chegam à mesma conclusão sobre o item anterior. Então se o caçador 4 propuser 99 moedas para si e uma para o caçador 2, este último aceitará, pois caso contrário ele ficará sem nenhuma. Apenas contando com os votos de 2 e 4, a proposta será aceita

c) O raciocínio feito nos itens anteriores pode ser repetido várias vezes até chegar ao caçador 9, que deve propor 96 moedas para si e uma moeda para cada um dos caçadores de ordem ímpar: 1, 3, 5 e 7. A partir disto, o caçador 10 deve propor 96 moedas para si e uma para cada um dos caçadores de ordem par: 2, 4, 6 e 8. Os caçadores com números pares votam a favor, já que seu ganho será maior do que na proposta do caçador 9.

06. a) Como um dos lados é 136 e a área é 13600, então o outro lado é 100. Além disto, sendo A um quadrado, ele possui lado 100. Consequentemente, o lado menor do retângulo B é 136-100=36 e o seu lado maior é 100, como na figura a seguir.



Um dos lados do retângulo C é 100 e o outro é metade do lado menor do retângulo B, ou seja, 36/2=18. Concluímos que a área do retângulo C é 18x100=1800.

b) O lado do retângulo X é igual ao menor lado do retângulo C, ou seja, 18.

c) Se somarmos 18^2=324 ao número 13600, então o resultado será 13924=118^2. Portanto, a raiz procurada é 118.

07. a) Seja p um primo maior que 3. Este primo, como qualquer número inteiro positivo, só pode deixar restos de 0 a 5 na divisão por 6. Veja que se ele deixasse os restos 0, 2, 3 ou 4, poderíamos fatorá-lo:

$$p = 6q + 0 = 2 \times 3q$$
$$p = 6q + 2 = 2 \times (3q + 1)$$
$$p = 6q + 2 = 2 \times (3q + 1)$$
$$p = 6q + 3 = 3 \times (2q + 1)$$
$$p = 6q + 4 = 2 \times (3q + 2)$$

Como p é maior que 3, em casa um dos casos acima ele seria um número composto. Então os únicos restos possíveis de p por 6 são 1 e 5.

b) Para fazer uma estimativa superior, podemos somar 2, 3 e todos os números que deixam restos 1 ou 5 na divisão por 6. Usaremos a fórmula de soma dada no enunciado e, por simplicidade, representaremos um número que deixa resto 5 por um múltiplo de 6 menos 1:

$$2 + 3 + (6 \times 1 - 1) + (6 \times 1 + 1) + \cdots (6 \times 166 + 1)$$
$$= 5 + 12 \times (1 + 2 + \cdots + 166)$$
$$= 5 + 12 \times \frac{166 \times 167}{2}$$
$$= 5 + 166332$$

$$= 166337$$

Então a soma dos números primos menores que 1000 é menor que 166338.

c) Entre os números considerados no item anterior, há vários que não são primos. Consideramos números que são múltiplos de 5 maiores que 5 dentre os que deixam o resto 1 ou 5 por 6. Basta então subtrair alguns destes múltiplos de 5 menores que 100 para melhorarmos a estimativa:

$$25 + 35 + 55 + 65 + 85 + 95 = 60 + 120 + 180$$
$$= 360.$$

E, com isto, podemos concluir que a soma dos números primos menores que 1000 é menor que 166338-360<166000

08. a) A fatoração de 2015 em primos é $5 \times 13 \times 31$. Então, seus oito divisores inteiros positivos são:

$$\{1,5,13,31,65,155,403,2015\}.$$

b) Escrevendo as divisões na forma $n = mq + r$, onde q é o quociente e r é o resto, teremos:

$$\begin{aligned}
2014 &= 1 \times 2014 + 0\\
2014 &= 5 \times 402 + 4\\
2014 &= 13 \times 154 + 12\\
2014 &= 31 \times 64 + 30\\
2014 &= 65 \times 30 + 64\\
2014 &= 155 \times 12 + 154\\
2014 &= 403 \times 4 + 402\\
2014 &= 2015 \times 0 + 2014
\end{aligned}$$

c) Além dos números nas duas listas serem os mesmos, note que eles são exatamente os antecessores dos divisores de 2015. De fato, seja x um divisor de n, então existe um divisor y tal que n=xy. Dividindo n-1 por x e por y temos:

$$\begin{aligned}
n &= xy\\
n - 1 &= x(y - 1)(x + 1)\\
n - 1 &= y(x - 1) + (y - 1).
\end{aligned}$$

Como o resto na divisão de um número por outro é único e sabemos que $0 \leq x - 1 \leq x$ e $0 \leq y - 1 \leq y$, então os restos destas duas divisões são exatamente x-1 e y-1. O que define também, de forma única, os quocientes: y-1 e x-1. Estes números devem ser escritos na lousa e no caderno, mas na ordem trocada. Vale lembrar que x=y, no caso em que n é um quadrado perfeito, então em vez de duas divisões existirá apenas uma e o mesmo número será escrito na lousa e no caderno. Deste modo, as listas na ousa e no caderno possuem os mesmos números, que são os antecessores dos divisores positivos de n.

09. a) Seguindo a ideia de Carolina, cada pessoa tem duas cores possíveis de chapéu, no total há 2x2x2=8 possibilidades de chutes. Entre eles, há apenas um caso favorável: acertarem seus chutes. Portanto, a probabilidade de ganhar o carro é 1/8.

b) Com a ideia de Beto, há agora apenas duas possibilidades: o chapéu de Ana é azul ou verde. Com um chute, ela terá a probabilidade ½ de acertar e os três ganharem. Veja que Beto e Carolina não influenciarão o resultado, pois eles vão simplesmente passar.

c) Cada pessoa olha as cores dos chapéus dos seus dois companheiros. Se forem de cores diferentes, esta pessoa deve passar. Se forem da mesma cor, então esta pessoa chuta que seu chapéu é da outra cor. Por exemplo, se os chapéus de Ana, Beto e Carolina forem azul, azul e verde, respectivamente, então Ana e Beto devem escrever “passo”, pois enxergam chapéus de cores diferentes, enquanto Carolina deve escrever “verde” que é a cor diferente da cor dos dois chapéus que ela vê. Neste caso os três ganhariam o carro. No total há 8 possibilidades para as cores dos três chapéus. Note que, com a estratégia de Ana, os três perdem apenas em duas possibilidades, todos os chapéus verdes ou todos os chapéus azuis. Nas outras seis possibilidades, haverá dois chapéus de uma cor e um chapéu da outra e, como no exemplo, os três ganham. Concluímos que a probabilidade de ganhar o carro é 6/8=3/4.

10. a) Tome os 6 menores números {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Neste caso, temos apenas 6 bilhetes bola-na-trave, que são formados por escolhas de 6 números do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Em princípio, existiriam 7 bilhetes, mas como um bilhete gol-no-ângulo não é bola-na-trave, o número de bilhetes bola-na-trave associados a ele é 6. Provaremos que este é o menor valor possível mostrando que todos os outros conjuntos têm pelo menos 6 bilhetes bola-na-trave. Tomando o conjunto {a,b,c,d,e, f } em ordem crescente do a para o f . Se f < 60, temos os bilhetes bola-na-trave:

$$\{a,b,c,d,e,f+1\}$$
$$\{a,b,c,d,e+1,f+1\}$$
$$\{a,b,c,d+1,e+1,f+1\}$$
$$\{a,b,c+1,d+1,e+1,f+1\}$$
$$\{a,b+1,c+1,d+1,e+1,f+1\}$$
$$\{a+1,b+1,c+1,d+1,e+1,f+1\}$$

Se f=60, mas a>1, temos os bilhetes:

$$\{a-1,b,c,d,e,f\}$$
$$\{a-1,b-1,c,d,e,f\}$$
$$\{a-1,b-1,c-1,d,e,f\}$$
$$\{a-1,b-1,c-1,d-1,e,f\}$$
$$\{a-1,b-1,c-1,d-1,e-1,f\}$$
$$\{a-1,b-1,c-1,d-1,e-1,f-1\}$$

Se a=1 e f=60, então existiriam dois números seguidos que não seriam consecutivos, por exemplo, $d-c \geq 2$, neste caso teríamos os bilhetes:

$$\{a,b,c+1,d,e,f\}$$

$$\{a, b+1, c+1, d, e, f\}$$
$$\{a+1, b+1, c+1, d, e, f\}$$
$$\{a, b, c, d-1, e, f\}$$
$$\{a, b, c, d-1, e-1, f\}$$
$$\{a, b, c, d-1, e-1, f-1\}.$$

b) Veja que cada número x no bilhete gol-no-ângulo gera 3 possibilidades para sua posição no bola-na-trave, a saber x-1, x e x+1. Se números seguidos estiverem próximos, então teremos que eliminar repetições, por exemplo, se a=b-1, ou a+1=b-1. Portanto, para chegar no máximo podemos deixar números seguidos com diferença de pelo menos 3. Um exemplo é o bilhete gol-no-ângulo {3,6,9,12,15,18}. Um bilhete bola-na-trave possui três possibilidades para o menor número, três para o segundo menor e assim por diante. Lembrando de não contar o bilhete gol-no-ângulo, teremos ao todo $3^6 - 1 = 728$ bilhetes bola-na-trave associados a ele.

c) Vamos separar em casos. Se o primeiro número for 1, então para cada um dos cinco números temos três possibilidades, resultando assim em 3^5 bilhetes. Se o primeiro número for 2, então o segundo número terá que ser 3 ou 4. Os outros têm três possibilidades cada, logo teremos 2×3^4 bilhetes bola-na-trave associados. Se o primeiro número for 3, o segundo é obrigatoriamente 4. Para cada um dos demais, há três possibilidades. Logo, teremos 3^4 possibilidades. Lembrando de retirar os bilhete gol-no-ângulo, ficamos com

$$3^5 + 2 \times 3^4 + 3^4 - 1 = 485$$

Bilhetes bola-na-trave associados ao gol-no-ângulo {2,3,8,11,14,17}.

11. a) Considere os números $0 < 1 \leq 1 \leq 1 \leq 3 \leq 3$. Veja que se tirarmos um dos números iguais a 1, podemos separar os restantes em dois grupos iguais a (1,3). Se tirarmos um 3, então podemos separar os restantes nos grupos (1,1,1) e (3).

b) Suponha que temos três números iguais a x e dois restantes y e z. Se retirarmos o z, teremos x+x=x+y. Se separarmos o y, teremos x+x=x+z, ou seja, x=z. Concluímos assim que os cinco números são obrigatoriamente iguais a x.

c) Veja que $e \geq d$ e $c \geq b$, logo:

$$b + d = e + c \geq d + b$$

Assim, segue que e=d e b=c, pois caso contrário chegaríamos a uma contradição. Como e=d e e+a=c+d, temos a=c. Deste modo, a=b=c e, usando o item anterior, podemos concluir que os cinco números são iguais.