SIMULADO SEGUNDA FASE
NÍVEL 2 – RESOLUÇÃO
Programa de Polos de
Reforço Olímpico 2017

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
Somando novos talentos para o Brasil

1. (Banco de Questões 2017)

Item a

Temos $9\blacklozenge 99 = 9 \cdot 99 + 9 + 99 + 6 = 1005$.

Item b

Temos $b = 2\blacklozenge b = 2b + 2 + b + 6 = 3b + 8$.

Daí, 2b=-4 e b=-2.

Item c

Como $(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$, segue que $a\blacklozenge b = (a+1)(b+1) + 5$. Daí,

$$a\blacklozenge b = 20$$
$$(a+1)(b+1) + 5 = 20$$
$$(a+1)(b+1) = 15$$

Como a<b e ambos são inteiros positivos, basta analisarmos os divisores positivos de 15, que são {1,3,5,15}, e consideramos as opções:

$$\begin{cases} a+1 = 1 \\ b+1 = 15 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a+1 = 3 \\ b+1 = 5 \end{cases}$$

Esses dois sistemas produzem como soluções (a,b)=(0,14) e (2,4). Como a e b são positivos, a única solução do problema é (a,b)=(2,4).

2. (Banco de Questões 2017)

Item a

Veja que cada soma dos números escritos nas linhas e colunas variam de -4 até 4 e que isso nos dá um total de 9 possibilidades. Se excluirmos 4 e -4, restariam apenas 7 possibilidades para as 8 fileiras e assim pelo menos duas delas precisariam ser iguais. Logo, se não aparecer 4 ou -4 entre as somas, a colocação dos números não será *fofinha.*

Item b

Existem várias colocações *fofinhas* para o tabuleiro 4x4. A seguir, exibimos um exemplo com os resultados das somas de cada fileira.

1	1	1	1	4
0	−1	−1	−1	−3
1	−1	1	1	2
1	−1	0	−1	−1
3	−2	1	0	

SIMULADO SEGUNDA FASE
NÍVEL 2 – RESOLUÇÃO
Programa de Polos de
Reforço Olímpico 2017

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
Somando novos talentos para o Brasil

Obmepeiros

3. (Banco de Questões 2017)

Item a

Suponha, por absurdo, que há três números positivos escritos na lousa, digamos $0<a<b<c$. Então $a^2<bc$ e isso contradiz a condição do enunciado.

Item b

Suponha, por absurdo, que há três números negativos escritos na lousa, digamos $a<b<c<0$. Então $0<-c<-b<-a$ e, repetindo o argumento do item anterior, temos $c^2=(-c)^2<(-a)(-b)=ab$. Isso contradiz a condição do enunciado.

Item c

Suponha que temos dois números negativos e dois positivos escritos na lousa, digamos $a<b<0<c<d$. Se $|b| \leq |c|$, teremos $b^2=|b|^2<|c|x|d|=cd$ e se $|b|>|c|$, então $c^2=|c|^2<|b|x|a|=ba$. Nos dois casos, o conjunto de números não pode satisfazer a condição do enunciado.

Item d

Não podemos ter mais que 3 elementos, pois caso existam 4 ou mais acontecerá um dos três casos anteriores. Para mostrar que 3 é realmente o máximo, basta exibir um exemplo com essa quantidade. Considere o conjunto {-2,1,2}. A condição do enunciado é satisfeita, pois $(-2)^2 > 1 \cdot 2 \; e \; 2^2 > (-2) \cdot 1$.

4. (Banco de Questões 2017)

Item a

Sejam A e B os números com 6 e 10 algarismos e começados por 1, respectivamente. Temos $10^5 < A < 2 \cdot 10^5$e $10^9 < B < 2 \cdot 10^9$. Com isso, multiplicando as duas desigualdades anteriores, podemos escrever:

$$10^{14} < A \cdot B < 4 \cdot 10^{14} < 10^{15}$$

Concluímos assim que o produto AB possui exatamente 15 algarismos.

Item b

Chamemos de x e y as quantidades de algarismos de 2^{2016} e 5^{2016} respectivamente. Desejamos encontrar x+y. Comparando com potências de 10, temos $10^{x-1} < 2^{2016} < 10^x$ e $10^{y-1} < 5^{2016} < 10^y$ (não pode ocorrer igualdade, pois 10^knão é uma potência 2 e nem de 5 para $k \geq 1$). Multiplicando as duas desigualdades anteriores, temos

$$10^{x-1} \cdot 10^{y-1} < 2^{2016} \cdot 5^{2016} < 10^x \cdot 10^y$$

ou seja,

$$10^{x+y-2} < 10^{2016} < 10^{x+y}.$$

Daí $x + y - 2 < 2016 < x + y$ e, consequentemente, x+y=2017. Então N possui 2017 algarismos.

5. (Banco de Questões 2017)

Item a

Como $6n+5$ e $5n+6$ são múltiplos de d, existem inteiros x e y tais que $6n+5=dx$ e $5n+6=dy$. Logo,

$$\begin{aligned} n-1 &= (6n+5)-(5n+6) \\ &= dx-dy \\ &= d(x-y) \end{aligned}$$

Implicando assim que d é divisor de n-1.

Item b

Usando o fato de $6n+5$ e $n-1$ serem múltiplos de d, podemos escrever

$$\begin{aligned} 11 &= (6n+5)-6(n-1) \\ &= dx-6d(x-y) \\ &= d\big(x-6(x-y)\big) \\ &= d(-5x+6y), \end{aligned}$$

que nos permite concluir que d é um divisor de 11.

Item c

Se 11 é um divisor de $5n+6$, então podemos escrever $5n+6=11k$. Além disso, podemos escrever 11 como

$$\begin{aligned} 11 &= (6n+5)-6(n-1) \\ &= (6n+5)-6\big((6n+5)+(5n+6)\big) \\ &= -5(6n+5)+6(5n+6) \\ &= -5(6n+5)+66k. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos da equação, temos

$$\begin{aligned} 5(6n+5) &= 66k-11 \\ &= 11(6k-1). \end{aligned}$$

Dado que 11 é divisor de 5(6n+5), que não possui fator comum com 5, podemos concluir que 11 divide 6n+5.

Item d

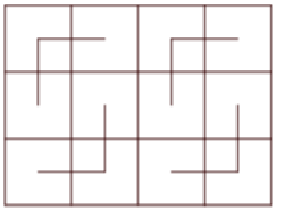
Basta organizar as informações obtidas nos itens anteriores. Já sabemos que mdc dos números dados divide 11, implicando apenas nas possibilidades 1 ou 11. Basta eliminar os casos em que 11 divide os dois números. Pelo item anterior, isso acontece quando 5n+6 deixa resto 0 na divisão por 11. Testando as possibilidades, vemos que isso acontece quando n deixa resto 1 na divisão por 11. De 1 até 50, existem 5 números que deixam resto 1 na divisão por 11, a saber, 1, 12, 23, 34 e 45. Então a fração $\frac{5n+6}{6n+5}$ é irredutível para 50-5=45 inteiros positivos n menores que 50.

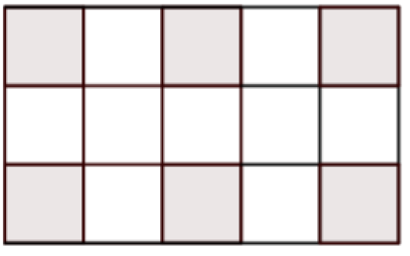
SIMULADO SEGUNDA FASE
NÍVEL 2 – RESOLUÇÃO
Programa de Polos de Reforço Olímpico 2017

6. (Banco de Questões 2017)

Item a

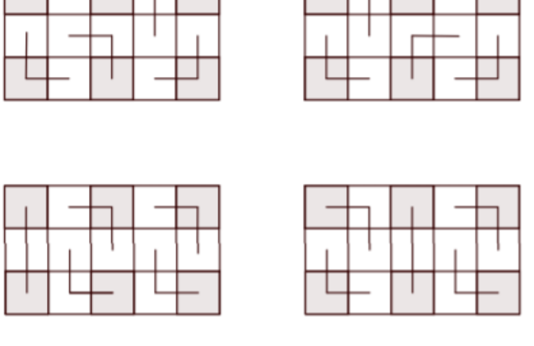
A figura a seguir mostra uma maneira de cobrir o tabuleiro 3x4 usando apenas L-triminós.





Item b

Considere o tabuleiro 3x5 a seguir e os 6 quadradinhos pintados. Como um L-triminó não pode cobrir 0, 1 ou 2 dos quadradinhos pintados na figura anterior. Se cobrir 0 ou 1, podemos usar o argumento do item anterior para mostrar que não será possível concluir a cobertura, pois 5L-triminós já cobrem 15 quadradinhos. Portanto, se o I-triminó cobrir dois quadradinhos marcados é sempre possível concluir a cobertura com os L-trminós como indicado na figura:



São 4 posições horizontais, duas na primeira linha e duas na terceira linha, e 3 verticais, cobrindo primeira, terceira e quinta colunas. No total, o I-triminó pode ocupar 7 posições.