OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Somando novos talentos para o Brasil

Nível 2

8.º e 9.º anos do Ensino Fundamental

SIMULADO 2.ª FASE – 11, 12 e 13 de Setembro de 2017

Nome completo do aluno

Endereço completo do aluno (Rua, Av., nº)

Complemento (casa, apartamento, bloco)

Bairro

Cidade

UF

CEP

Endereço eletrônico (email)

DDD

Telefone

Assinatura

DDD

Telefone (outro)

Preencha e confira os dados acima com muita atenção!

Visite nossas páginas na Internet: *obmepeiros.pidtec.com.br* *www.facebook.com/obmepeiros*

INSTRUÇÕES

1. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadradinho e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
2. Lembre-se de assinar o quadro acima.
3. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
4. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
5. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
6. Na prova verdadeira só serão considerados os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número de itens de todas as questões, Principalmente o item (a) de cada questão.
8. Respostas sem justificativas não são consideradas na prova oficial do dia 16 de setembro.
9. Não é permitido:

✓ Usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

✓ Comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;

✓ Usar quaisquer aparelhos eletrônicos, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).

Boa prova!

Obmepeiros SIMULADOS

Simulado Segunda Fase – Nível 2

Simulado oferecido pelo Grupo Obmepeiros de Educação
para o Programa de Polos de Reforço Olímpico 2017.

Este simulado faz parte do capítulo 5 do e-book Preparação para a Segunda Fase da OBMEP 2017.

1. Dados dois números reais *a* e *b,* defina a operação $a\blacklozenge b$ por $a\blacklozenge b = a \cdot b + a + b + 6$**.** Por exemplo, $3\blacklozenge 7 = 3 \cdot 7 + 3 + 7 + 6 = 37$ e $3\blacklozenge 3 = 3 \cdot 3 + 3 + 3 + 6 = 21$**.**

---

a) Encontre o valor de 9♦99.

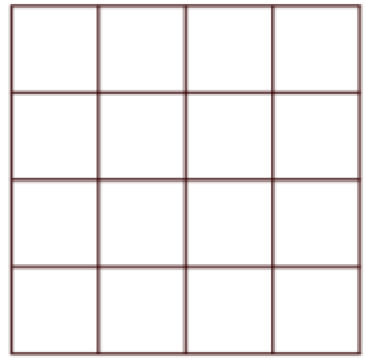
---

b) Encontre o número inteiro b tal que 2♦b=b.

---

c) Determine todos os números inteiros positivos a e b, com a<b, tais que a♦b=20.

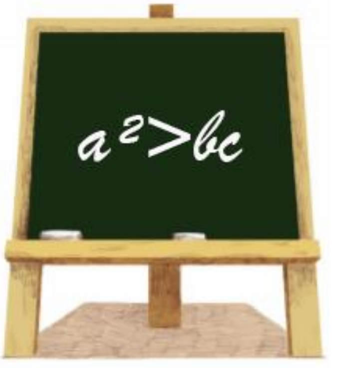
2. Na figura ao lado, temos um tabuleiro 4x4.
Em cada quadradinho 1x1, vamos colocar exatamente um número do conjunto {-1,0,1}. Uma colocação desses números é dita *fofinha* se ao somarmos os números em cada uma das 4 linhas e os números em cada uma das 4 colunas obtivermos 8 números diferentes.



a) Explique por que não existe colocação *fofinha* no tabuleiro 4x4 em que não apareça soma 4 nem soma -4.

b) Exiba uma colocação *fofinha* para o tabuleiro 4x4.

3. Joãozinho escreveu alguns números reais não nulos, todos distintos, na lousa, de modo que se tomarmos qualquer um deles e elevarmos ao quadrado o resultado é maior que o produto de quaisquer outros dois números escritos na lousa.



a) Explique por que não pode haver três reais positivos escritos na lousa.

b) Explique por que não pode haver três reais negativos escritos na lousa.

c) Explique por que não pode haver dois números positivos e dois números negativos escritos na lousa.

d) Determine a maior quantidade possível de números escritos na lousa com um exemplo de um conjunto de números que satisfaça a condição requerida.

4. Podemos determinar a quantidade de algarismos da representação decimal de um número inteiro positivo determinando a maior potência de 10 que não é maior que ele. Mais precisamente, um número inteiro N possui *k* algarismos em sua representação decimal quando $10^{k-1} \leq N \leq 10^{k}$. Por exemplo, 2016 possui 4 algarismos. Em alguns problemas, é importante achar a quantidade de algarismos envolvidos no resultado de operações aritméticas.

---

a) Determine a quantidade de algarismos do produto $111111 \cdot 1111111111$, em que o primeiro fator possui 6 algarismos e o segundo possui 10 algarismos.

---

b) Os números 2^{2016} e 5^{2016} são escritos um ao lado do outro para formar um único número *N* que possui uma quantidade de algarismos que é a soma das quantidades de algarismos dos dois números. Por exemplo, se fizéssemos isso com 2^{3} e 5^{3} iríamos obter o número 8125, que possui 4 algarismos. Determine a quantidade de algarismos de *N*.

5. Uma fração é dita irredutível quando seu numerador e seu denominador não possuem fatores comuns, ou seja, quando o máximo divisor comum entre os dois números é 1. Por exemplo, a fração $\frac{3}{7}$ é irredutível, mas a fração $\frac{10}{14}$ não é, uma vez que 2 é um fator comum de 10 e 14. Para que valores de n a fração $\frac{5n+6}{6n+5}$ é irredutível? Vamos estudar esse problema em partes.

---

a) Seja $d = mdc(5n+6, 6n+5)$ o máximo divisor de $5n+6$ e $6n+5$**.** Verifique que d é um divisor de n-1.

---

b) Sabendo que d é um divisor de $n-1$, conclua que d também é divisor de 11.

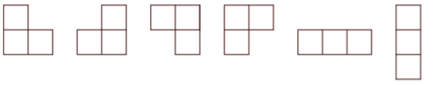
---

c) Verifique que se 11 divide $5n+6$**,** então 11 divide $6n+5$**.**

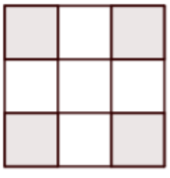
---

d) Para quantos inteiros positivos n, menores que 50, a fração $\frac{5n+6}{6n+5}$ é irredutível?

6. Queremos cobrir um tabuleiro com certas pecinhas sem sobreposição e de modo que nenhuma parte delas fique fora do tabuleiro. Usaremos pecinhas, formadas por quadradinhos, chamadas L-triminós e I-triminós que podem ser rotacionadas nas posições descritas na figura a seguir.



Para provar que é possível realizar uma cobertura, basta mostrar uma maneira de posicionar as pecinhas. Por outro lado, para provar que não é possível realizar alguma cobertura, nem sempre é conveniente testar todas as configurações possíveis de peças, e muitas vezes, precisamos esboçar argumentos engenhosos. Por exemplo, provaremos que não é possível cobrir um tabuleiro 3x3 usando apenas L-triminós.



Observe os quadradinhos pintados da figura. São 4 quadradinhos e não é possível cobrir dois deles usando um mesmo L-triminó. Assim, para cobrir os 4 quadradinhos teríamos que usar pelo menos 4 L-triminós, mas isso resultaria em 4x3=12 quadradinhos cobertos, que claramente excede o total de 9 quadradinhos do tabuleiro inteiro. Portanto, não é possível cobrir o tabuleiro 3x3 com L-triminós.

a) Mostre uma maneira de cobrir um tabuleiro 3x4 usando apenas L-triminós.

b) Prove que não é possível cobrir um tabuleiro 3x5 usando apenas L-triminós.

c) É possível cobrir o 3x5 usando exatamente I-triminó e alguns L-triminós. Determine as posições que o I-triminó pode ocupar de modo que o resto do tabuleiro possa ser coberto com L-triminós.

RASCUNHO